

隧道衬砌随机分析的区间有限元法

夏炜洋, 何 川, 汪 洋

(西南交通大学 地下工程系, 成都 610031)

摘 要: 隧道衬砌结构内力计算中, 围岩的力学参数和结构的参数具有不确定性, 同时, 其不确定性是有界的。对于这些参数的不确定性, 在工程上可以用一个合理的区间数值来估计。对于单个随机变量, 可以采用有限元方程来求解结构内力; 而对于多个随机变量的情况, 考虑到计算模型的不确定性和数学求解的复杂性, 利用有限元程序来导出各变量对结构内力的作用效应, 进而得到不同参数组合的区间值, 最终确定隧道衬砌的结构内力区间值, 为隧道衬砌结构内力的计算和工程应用提供一种新方法。

关 键 词: 隧道衬砌; 随机变量; 区间数; 有限元法

中图分类号: TB 115; U 451.4

文献标识码: A

Random analysis of tunnel lining with interval finite element method

XIA Wei-yang, HE Chuan, WANG Yang

(Department of Underground Engineering, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

Abstract: In the tunnel lining structure internal force calculation, it is indeterminacy for mechanics parameters of surrounding rock and parameters of structure. At the same time, the indeterminacy has the boundary, which can be estimated by a reasonable interval numbers in engineering. Changing a single random variable in the interval numbers, the structural internal force can be solved by adopting a finite element equation. But in the case of multi-variable, considering indeterminacy of calculation model and complexity of mathematical solution, the finite element procedure can be used to educe the action effect of each variable to structure's internal force, then the interval values consist of different parameters are obtained; and the interval values of tunnel lining structural inner force are confirmed finally. The method can provide a new method for the calculation of interval numbers of tunnel lining and engineering application.

Key words: tunnel lining; random variable; interval numbers; finite element method

1 引 言

隧道衬砌的可靠度分析是按照 R-S 模式进行的, 检算混凝土衬砌的抗压和抗裂性能。作用效应 S 包含各种荷载、岩土特性等随机变量的作用力; 广义抗力 R 则包含了材料强度和几何特征等随机变量。将概率论与有限元法结合来处理这类随机结构的数值方法叫随机有限元法。目前这类方法主要有摄动有限元法, 蒙特卡罗有限元法, 随机有限元响应面法, 纽曼随机有限元法等^[1]。

上述算法大都需要事先进行大样本的统计, 得出各随机变量的统计特征, 再进行大样本的计算, 在工程上不容易推广。

模型的随机参数可以用区间数来表示, 这样就能把结构的随机计算转化为区间计算。目前对于区间运算的研究正在受到重视^[2-7]。对于随机变量为单个或不多的结构来说, 区间运算可以用传统的数学方法进行分析, 但是对于随机变量较多且各随机变量相互之间关系不是很明确的结构来说, 区间分析的过程和工作量就较为复杂。

本文首先用概率的方法取得各随机变量的区间值, 利用现有有限元的程序得到各随机参数对于隧道衬砌内力的影响关系, 定出整个结构参数的区间取值, 再通过有限元程序求出隧道衬砌内力的区间值。

2 隧道衬砌的随机变量和区间估计

在隧道衬砌结构中,存在着很多不确定因素。例如结构的物理性质、几何参数以及所承受的荷载(如土荷载、水压荷载以及地震荷载)等,由于条件所限,人们不能事先确定其数值的大小。这类不确定因素通常被处理为随机变量。

对于有限单元法,其有限元控制方程为

$$[K]\{u\} = \{F\} \quad (1)$$

式中: $[K]$ 为刚度矩阵, $[K]$ 依赖于衬砌的材料特性和几何形状,如果衬砌的材料特性和几何形状是确定的,那 $[K]$ 也是确定的,反之则是一个随机变量; $\{F\}$ 为荷载,是关于地层力学参数弹性模量 E 、泊松比 μ 、黏聚力 c 和摩擦角 ϕ 等的一个随机变量。

上述各参数虽是随机变量,但都具有一定的统计特征。

随机变量 ξ 取值不超过任意实数 x 的概率 $P(\xi \leq x)$ 称为 ξ 的分布函数,记为 $F(x)$:

$$F(x) = P(\xi \leq x) = P(-\infty < \xi < x) \quad (2)$$

随机变量的参数是不确定的,但可以通过区间估计直接给出一个随机区间,即以多大的概率来包含未知参数^[8]。

若存在 $\hat{X}_1$, $\hat{X}_2$ 及 $\alpha (0 < \alpha < 1)$, 使得

$$P\{\hat{X}_1 < X < \hat{X}_2\} = 1 - \alpha \quad (3)$$

则称随机区间 $[\hat{X}_1, \hat{X}_2]$ 为参数的置信度为 $1 - \alpha$ 的区间估计, $1 - \alpha$ 为置信区间的置信度, $\hat{X}_1, \hat{X}_2$ 分别为置信下限和置信上限。

置信度描述了区间估计的可靠度,而置信区间的长度描述的是区间估计的精度,这两者之间的关系是相逆的。对于工程上来说,更关心的是区间估计的可靠性要求,即先定出 α 再来确定参数的取值区间。

这样,问题就转变成了对确定区间进行有限元求解了,我们可以用现有的有限元程序进行隧道衬砌内力的求解。

3 区间有限元方程的求解

3.1 单个随机变量的有限元分析

对于式(1)表述的有限元位移法中的力学控制方程,刚度矩阵 $[K]$ 中所包含的随机变量是 d , E_1 , $[K]$ 的方程:

$$[K]^e = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] dv \quad (4)$$

式中: $[D]$ 为弹性刚度矩阵,包含了材料的弹性模量 E_1 ,如果只有衬砌弹模 E_1 为随机变量,围岩的参数为确定的,即式(1)右边的荷载 $\{F\}$ 是确定的; $[B]$ 为应变矩阵。我们以区间估计 $[\hat{E}_1, \hat{E}_2]$ 来代替弹性刚度矩阵 $[D]$ 中的 E ,在隧道工程中,一般以平面应变问题为主,其弹性刚度矩阵为

$$[D] = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu}{1-\mu} & 0 \\ \frac{\mu}{1-\mu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)} \end{bmatrix} \quad (5)$$

考察式(5), $[D]$ 是关于 E 的单调函数,因此由式(1)求解,可以得出位移的解也是一个单调的区间值 $[\hat{U}_1, \hat{U}_2]$ 。同理,对于荷载 $\{F\}$ 是区间值的情况,也可以求解得出位移的区间解。

3.2 含多个随机变量的有限元分析

如果按地层一荷载模式来计算,则需要考虑多个随机变量作用下的有限元分析。由于各随机变量之间关系复杂,用公式的方法难以明确表达随机变量对衬砌结构的内力产生的作用效应。我们可以认为程序是一个灰系统,把某个变量代入灰系统,得出变量对于关心的功能函数的影响,因此我们可以暂时不分析随机变量与结构内力的函数关系,而用程序进行计算,分别考察各随机变量对结构的内力影响。它们之间的函数关系可以用下式表示:

$$Y = F(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad (6)$$

式中: Y 为我们关心的功能函数; $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是 n 个独立的随机变量。

考察某个随机变量对 Y 的影响,固定其他的随机变量,即认为其他变量是确定的,将某个 X 代入程序后得到该随机变量对 Y 的影响区间值。

分别把随机变量的区间估计的上限值和下限值代入程序,考察功能函数的变化,当功能函数是正变化时,我们认为该随机变量对功能函数的作用是正向的,定义该随机变量为正水平因子,相应功能函数的区间取值如下式:

$$[\hat{y}_1, \hat{y}_2] = \left[f(x_1, x_2, \dots, x_i^{(+)}, \dots, x_n), f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i^{(+)}, \dots, x_n) \right] \quad (7)$$

反之,则定义随机变量为该功能函数的负水平因子,相应功能函数的区间取值如下式:

$$[\hat{y}_1, \hat{y}_2] = \left[f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i^{(-)}, \dots, x_n), f(x_1, x_2, \dots, \bar{x}_i^{(-)}, \dots, x_n) \right] \quad (8)$$

将各个随机变量分别代入程序，分别考察各随机变量对于功能函数的贡献度，从而相应地确定各随机变量为正水平因子还是负水平因子。对各随机变量进行组合，取正水平因子的区间上限，负水平因子的区间下限作为多个随机变量对功能函数的区间估计的置信上限；取正水平因子的区间下限，负水平因子的区间上限作为多个随机变量对功能函数的区间估计的置信下限。将其代入有限元程序进行计算，就得到了多个随机变量下功能函数的区间估计值：

$$[\hat{y}_1, \hat{y}_2] = \left[f \begin{pmatrix} \bar{x}_1^{(+)} \\ \bar{x}_2^{(-)} \\ \vdots \\ \bar{x}_n^{(+)} \end{pmatrix}, f \begin{pmatrix} \bar{x}_1^{(+)} \\ \bar{x}_2^{(-)} \\ \vdots \\ \bar{x}_n^{(+)} \end{pmatrix} \right] \quad (9)$$

4 随机变量下隧道衬砌内力有限元分析

某山岭隧道，其二维有限元计算模型见图 1 和图 2，其结构和围岩参数具有随机变量特性。模型计算区域宽 70 m，深 50 m，隧道拱顶埋深 20 m，衬砌结构采用Ⅲ级围岩结构，计算时考虑围岩有 40 % 的应力释放。分析软件采用国际著名的 ABAQUS 非线性有限元软件，它具有丰富的适宜岩土工程分析的本构模型和非凡的非线性计算能力^[9]，是岩土工程分析领域的有效工具。

隧道衬砌的弹性模量、围岩的弹性模量、泊松比、黏聚力、摩擦角都是随机变量，文献[10, 11]都对上述参数进行过详细研究，通过统计方法给出了各参数的分布类型，见表 1。衬砌厚度和衬砌弹模的统计特征按设计资料并结合现场试验给出，围岩参数的统计特征中的均值采用《公路隧道设计规范（JTG D70—2004）》规定范围取值，变异系数参考文献[11]取值，具体的统计特征见表 1。

根据各随机变量的分布类型，在工程应用上一般取分位值 α 为 0.05，基本可以得到满足工程应用的置信水平，而区间的长度又不会太长。按式（10）计算分别得到各随机变量的区间估计值如表 2 所示，其中：

$$\mu = \bar{X} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \quad (10)$$

对于隧道衬砌，我们主要关心其弯矩和轴力的分布特征。将上述变量分别代入有限元程序，考察各变量对于衬砌弯矩和轴力的影响，表 3 列出了各变量对于衬砌内力的影响水平。

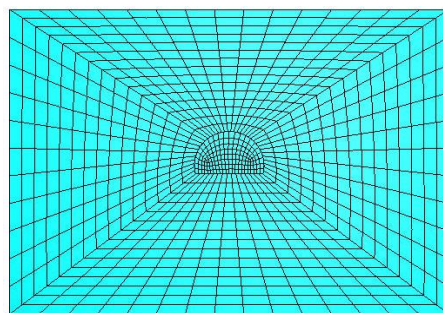


图 1 隧道有限元模型

Fig.1 FEM model of tunnel

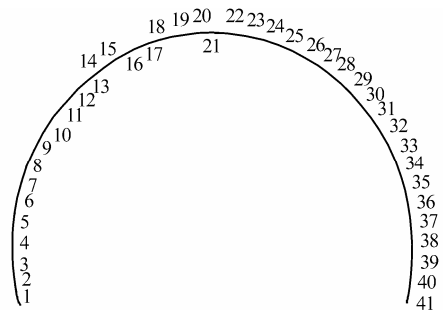


图 2 衬砌模型单元及编号

Fig.2 Model unit and number of lining

表 1 随机变量统计特征

Table 1 Statistical characteristics of random variables

变量种类	衬砌厚度 d/m	衬砌弹模 E_1/GPa	围岩弹模 E_2/GPa	围岩泊松比 μ	黏聚力 c/MPa	摩擦角 $\phi/^\circ$	围岩重度 $\gamma/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
均值	0.3	29	12	0.3	0.8	50	2 400
标准差	0.06	2.38	3.21	0.19	0.25	1.21	48
分布类型	正态	正态	正态	对数	正态	正态	正态

表 2 随机变量区间值

Table 2 Interval values of random variables

变量种类	衬砌厚度 d/m	衬砌弹模 E_1/GPa	围岩弹模 E_2/GPa	围岩泊松比 μ	黏聚力 c/MPa	摩擦角 $\phi/^\circ$	围岩重度 $\gamma/\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$
区间值	[0.32, 0.27]	[29.85, 28.15]	[13.15, 10.85]	[0.36, 0.23]	[0.89, 0.71]	[50.4, 49.6]	[2 414, 2 386]

表 3 变量对衬砌内力的影响水平

Table 3 Influence level of lining's internal force by variable

变量 种类	衬砌 厚度	衬砌 弹模	围岩 弹模	围岩 泊松比	黏聚力	摩擦角	围岩 重度
	d	E_1	E_2	μ	c	ϕ	γ
影响水平	+	+	-	-	/	/	+

按照式 (9) 将各变量的区间值进行组合, 用有限元软件进行计算, 得到隧道衬砌内力的区间分布如图 3 和图 4 所示。

从上述 2 个图中可以方便地得到衬砌各部分的内力取值范围。考虑到衬砌的对称性, 取衬砌一半将衬砌的 1~20 单元的节点内力标准值和区间值列于表 4。

从表中可以看出, 拱顶的弯矩标准值为 555 N·m, 区间值为[331 N·m, 892 N·m], 内侧受拉; 拱脚具有最大的轴向压力, 标准值为 593 kN, 区间值为 [541 kN, 651 kN]。

在工程应用中, 从安全的角度来考虑, 对于计算结果需要按最不利情况来进行设计。在控制截面内力检算中, 应对衬砌混凝土的抗压、抗拉应力按截面内力的区间上限或下限值进行验算, 以求在尽可能大的可靠度前提下取得最优的经济性。

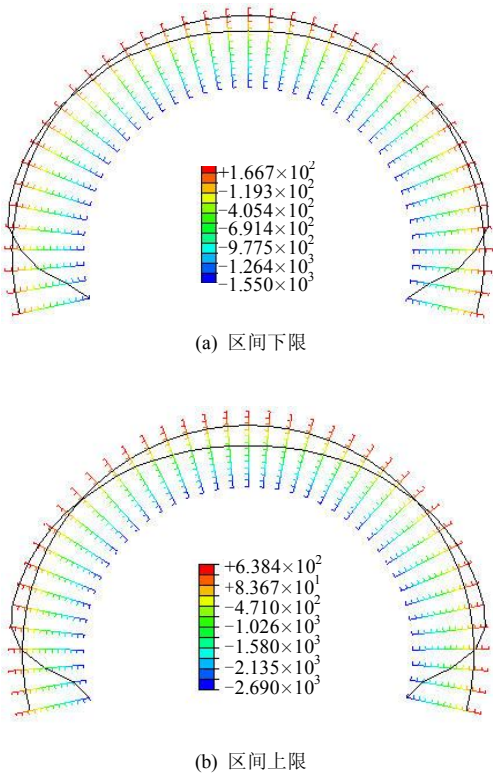


图 3 衬砌的弯矩分布区间值
Fig.3 Interval value distributions of lining's bending moment

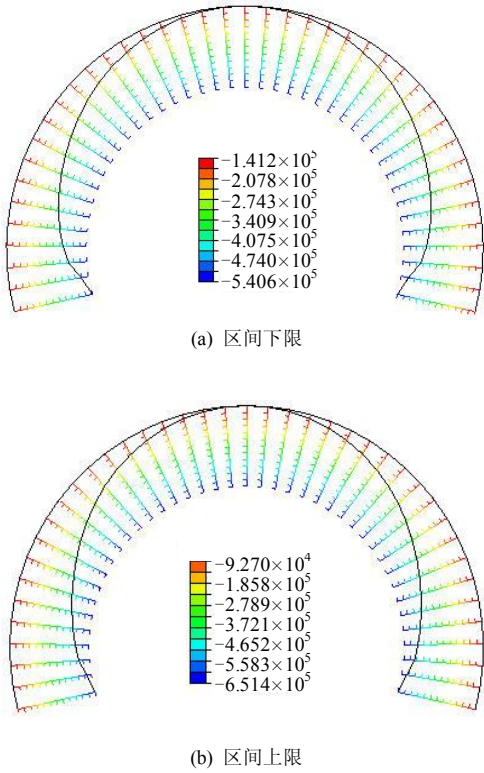


图 4 衬砌的轴力分布区间值
Fig.4 Interval value distributions of lining's axial force

表 4 各截面内力的标准值及区间值

Table 4 Internal force of standard value and interval value of each section

节点 编号	弯矩 / N·m		轴力 / kN	
	标准值	区间值	标准值	区间值
1	-2 036	[-1 550, -2 690]	-593	[-541, -651]
2	-1 572	[-1 139, -2 176]	-556	[-503, -618]
3	-729	[-563, -973]	-509	[-452, -576]
4	-77	[-182, 79]	-484	[-425, -554]
5	280	[103, 556]	-461	[-403, -531]
6	351	[167, 638]	-441	[-384, -507]
7	321	[158, 576]	-417	[-365, -480]
8	286	[146, 503]	-393	[-346, -449]
9	229	[118, 401]	-366	[-326, -416]
10	161	[84, 280]	-338	[-304, -380]
11	80	[43, 140]	-309	[-283, -342]
12	-38	[-32, -43]	-280	[-260, -304]
13	-140	[-94, -204]	-250	[-238, -265]
14	-181	[-105, -294]	-224	[-219, -231]
15	-250	[-143, -413]	-200	[-201, -198]
16	-357	[-214, -572]	-176	[-184, -168]
17	-428	[-256, -685]	-156	[-169, -142]
18	-471	[-278, -761]	-140	[-157, -121]
19	-515	[-304, -831]	-128	[-148, -105]
20	-546	[-324, -878]	-121	[-143, -96]
21	-555	[-331, -892]	-119	[-141, -93]

5 结 语

由于在隧道工程中, 考虑到力学参数和结构特

征的随机性, 要精确的计算结构所受的内力是比较困难的。通过将不确定的随机参数用区间数来描述, 进而与有限元程序相结合, 可以方便地得到衬砌结构的内力取值范围, 从而指导隧道结构的设计和施工。

对于单个的随机变量, 可以通过考察有限元方程, 用区间值代替随机变量值进行相关内力的计算。对于本文中多个变量为随机变量的情况, 可以分别考虑各随机变量对结构内力的影响, 通过有限元程序类似“黑箱”的功能来处理, 进而得到在一定的置信度下的区间结果。从计算结果看, 本文方法在计算工作量大为减少的情况下, 可以得到所关心的隧道衬砌结构内力的上下限值, 对于工程应用具有重要的前景。

参 考 文 献

- [1] 陈虬, 刘先斌. 随机有限元法及其工程应用[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1993.
- [2] 喻和平, 徐卫亚. 用区间有限元计算边坡荷载组合效应[J]. 岩土力学, 2006, 27(6): 899—902.
YU He-ping, XU Wei-ya. Calculation of slope response under combinatorial loads by using interval finite element method[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2006, 27(6): 899—902.
- [3] 郭书祥, 吕震宙. 区间运算和静力区间有限元[J]. 应用数学和力学, 2001, 22(12): 1 249—1 254.
GUO Shu-xiang, LU Zhen-zhou. Interval arithmetic and static interval finite element method[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2001, 22(12): 1 249—1 254.
- [4] CHEN Su-huan, YANG Xiao-wei. Interval finite element method for beam structures[J]. **Finite Elements in Analysis and Design**, 2000, 34(1): 75—88.
- [5] 张建国, 陈建军, 马孝松. 具有区间参数的不确定结构静力区间分析的一种算法[J]. 机械科学与技术, 2005, 24(10): 1 158—1 162.
ZHANG Jian-guo, CHEN Jian-jun, MA Xiao-song. A method for static interval analysis of uncertain structures with interval parameters[J]. **Mechanical Science and Technology**, 2005, 24(10): 1 158—1 162.
- [6] 刘世君, 徐卫亚, 王红春. 不确定性岩石力学参数的区间反分析[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(6): 885—888.
LIU Shi-jun, XU Wei-ya, WANG Hong-chun. Interval back analysis of uncertain parameters in rock mechanics[J]. **Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering**, 2004, 23(6): 885—888.
- [7] RAO S S, BERKE L. Analysis of uncertain structural systems using interval analysis[J]. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, 1997, 35(4): 727—735.
- [8] 刘长虹, 陈虬. 单源模糊数的模糊随机有限元方程的解法[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(11): 1 147—1 150.
LIU Chang-hong, CHEN Qiu. A method of solving the fuzzy finite element equations in monosource fuzzy numbers[J]. **Applied Mathematics and Mechanics**, 2000, 21(11): 1 147—1 150.
- [9] 朱向荣, 王金昌. ABAQUS 软件中部分土模型简介及其工程应用[J]. 岩土力学, 2004, 25(增刊 2): 144—148.
ZHU Xiang-rong, WANG Jin-chang. Introduction to partly soil models in ABAQUS software and their application to the geotechnical engineering[J]. **Rock and Soil Mechanics**, 2004, 25(Supp.2): 144—148.
- [10] 景诗庭, 朱永全, 宋玉香. 隧道结构可靠度[M]. 北京: 中国铁道出版社, 2002.
- [11] 松尾稔. 地基工程学可靠性设计的理论和实际[M]. 北京: 人民交通出版社, 1990.